目 录

专题一 行列式

知识点 1 行列式的概念及其性质

1.排列的相关定义

(1)**排列：**将$1, 2$，n这n个元素排成一列，叫做这n个元素的全排列，一般我们简称为排列。

(2)**奇排列和偶排列：**排列的逆序数为奇数时，称该排列为奇排列；排列的逆序数为偶数时，称该排列为偶排列。

2.逆序和逆序数

（1）**逆序：**例如：排列 123 中不存在逆序，因为没有大数排在小数的前面；排列 132 有一个逆序：3 和 2；排列 321 有三个逆序 3 和 2、3 和 1 以及 2 和 1.

（2）**逆序数：**一个排列中逆序的数量称为这个排列的逆序数，一般我们用函数 $\tau(x)$ 表示排列 x 的逆序数，则 $\tau(123)=0, \tau(132)=1, \tau(321)=3$.

3.对换

在排列中，将任意两个元素交换位置，其它的元素不变的操作叫做排列的一次对换.

4.行列式的六大性质

设 n 阶矩阵，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，则 A 的转置 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，我们也可用$n$个$n$维列向量表示矩阵$A$,即 $A=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$.另外，我们以后用符号$r_i$表示行列式（或矩阵）的第$i$行,$c_j$表示行列式（或矩阵）的第$j$列.

（1）行列式和它的转置行列式相等，即$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T|$.

（2）互换行列式的两列（或两行），行列式变号，即

$$|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_i}\cdots\boldsymbol{a_j}\cdots\boldsymbol{a_n}|=-|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_i}\cdots\boldsymbol{a_j}\cdots\boldsymbol{a_n}|.$$

推论：如果一个行列式有两行或者两列完全相同，那么这个行列式一定为 0 .

（3）行列式中某一列（或某一行）中所有元素都乘以同一个常数 k，等于用该常数 k 乘以这个行列式，即

$$|\boldsymbol{a_1}\cdots k\boldsymbol{a_i}\cdots\boldsymbol{a_n}|=k|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_i}\cdots\boldsymbol{a_n}|.$$

（4）行列式中若有两列（或两行）对应元素成比例，则这个行列式为 0，即

$$|\boldsymbol{a_1}\cdots k\boldsymbol{a_i}\cdots\boldsymbol{a_j}\cdots\boldsymbol{a_n}|=\boldsymbol{0}.$$

（5）如果行列式 D 的某一列（或某一行）的元素都是两个数的和，则 D 等于拆分后的两个行列式的和，即

$$|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_p}+\boldsymbol{a_q}\cdots\boldsymbol{a_n}|=|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_p}\cdots\boldsymbol{a_n}|+|\boldsymbol{a_1}\cdots\boldsymbol{a_q}\cdots\boldsymbol{a_n}|.$$

（6）行列式的某一列（或某一行）的各元素乘以同一个数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变。

知识点 2 行列式的展开

1. 余子式

在n阶行列式中，去掉元素a_{ij}所在的第i行，第j列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的$n-1$阶行列式称为元素a_{ij}的余子式，记成M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 代数余子式

余子式M_{ij}乘$(-1)^{i+j}$后称为a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，

即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,显然也有$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行（或某一列）展开

行列式的值等于行列式的某行（列）元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即：

$$|A|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

但行列式的某行（列）元素分别乘另一行（列）元素的代数余子式后再求和，结果为零，即

$$\text{当}\,p\neq q\,\text{时},\ \sum_{j=1}^{n}a_{pj}A_{qj}=a_{p1}A_{q1}+a_{p2}A_{q2}+\cdots+a_{pn}A_{qn}=0$$

$$\text{当}p \neq q\text{时，}\sum_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq}=a_{1p}A_{1q}+a_{2p}A_{2q}+\cdots+a_{np}A_{nq}=0$$

知识点 3 几种特殊行列式

1.上（下）三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2.副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3.两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} A_{m\times m} & O \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A|\,|B|.$$

$$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A|\,|B|.$$

4.范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

（可用数学归纳法证明，注意：有时会考察这个行列式的转置形式）

5.行和或列和相等的行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(将第二列起的每一列都加到第一列后提取公共项，见例 3-1)

6.爪型行列式

当$a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$时

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{a_i}\right)\times a_1 a_2\cdots a_n\,(n\geq 1)$$

知识点 4 计算抽象型行列式的常用公式

设A,B为n阶方阵，则

(1) $|A^T|=|A|$

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(3) $|AB|=|BA|=|A||B|,|A^k|=|A|^k$

(4) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$(若A可逆)

(5) $|A^*|=|A|^{n-1}$

(6) $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots\lambda_n$是$A$的$n$个特征值

(7)若A和B相似，则$|A|=|B|$

专题二 矩阵及其运算

知识点 5 矩阵的概念和基本运算

1. 矩阵

由$m\times n$个元素组成的m行n列的数表$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为一个$m\times n$ 阶矩阵，记为$A=(a_{ij})_{m\times n}$，当$m=n$时，我们称矩阵A为n阶方阵（或n阶矩阵）。当矩阵A中所有的元素都为零时，我们称为零矩阵，记为$A=0$（一般用粗体表示零矩阵）.

2. 同型矩阵及矩阵相等

当矩阵A,B的行数和列数都相同时，我们称矩阵A,B为同型矩阵，设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n,}$ 当$a_{ij}=b_{ij}$ （i=1,2,…,m；j=1,2,…,n）我们称矩阵A,B相等，记为$A=B$.

3. 特殊矩阵

（1）**转置矩阵：**设$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$为矩阵$A$的转置矩阵，记为$A^T$.

（2）**单位矩阵：** 称$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$为单位矩阵.（部分教材用$I$表示单位矩阵，且单位矩阵一定为方阵）

（3）**对称矩阵与反对称矩阵：** 若 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^T=A$,即$a_{ij}=a_{ji}(1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对称矩阵；若 $A^T=-A$,即$a_{ij}=-a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵$A$为反对称矩阵.（反对称矩阵主对角线元素为 0）

（4）**正交矩阵：** 设A为n阶方阵，且满足$AA^T=A^TA=E$,则称矩阵A为正交矩阵.

（5）**幂等矩阵：** 若A为n阶方阵，且满足$A^2=A$，则称矩阵A为幂等矩阵.

（6）**伴随矩阵：**

设$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$为$n$阶矩阵，$A_{ij}$为$A$的代数余子式

记$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$,称$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵.

伴随矩阵的性质：

(1) $AA^* = A^*A = |A|E$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*(n \geqslant 2)$

(3) $(AB)^* = B^*A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}(n \geqslant 2)$

(5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{1}{|A|}A$

(6) $(A^*)^T = (A^T)^*$

(7) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A(n \geqslant 3)$

4. 基本运算

(1) **矩阵的加减法**

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$,

则 $A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$

显然，只有两个矩阵同型时才能相加减.

(2) **矩阵的乘法**

(i) 数与矩阵的乘法

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 则 $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$

(ii) 矩阵与矩阵的乘法

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix},\ 则\ AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

其中，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,s)$

显然，两个矩阵的乘法必须满足左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相等。若A,B均为n阶方阵，且满足$AB=BA$，则称A和B可交换，显然单位矩阵和任意同阶方阵可交换.

(3) **矩阵的运算法则**

$A+B=B+A$

$(A+B)+C=A+(B+C)$

$(AB)C=A(BC)$

$(k+l)A=kA+lA$

$k(A+B)=kA+kB$

$A(B+C)=AB+AC$

(4) **转置矩阵的性质**

$(A^T)^T=A$

$(kA)^T=kA^T$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(AB)^T=B^TA^T$

$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

$(A^T)^*=(A^*)^T$

注：$(ABC)^T=C^T(AB)^T=C^TB^TA^T$,

一直可递推到n个矩阵相乘：$(A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^TA_{n-1}^T\cdots A_1^T$.

(5) 方阵的多项式

设A为n阶方阵，我们定义$A^0=E,A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m\text{个}A}$,

所以$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$

设x的m次多项式$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

则n阶方阵A的m次多项式我们定义为：

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E.\ (a_m\neq 0)$$

(注意：a_0E的E千万别漏掉)

(6) 方阵的行列式

由n阶方阵A的元素所构成的行列式叫做方阵A的行列式，记为$|A|$或$\det(A)$.

有以下三个性质需要掌握：

(1) $|A|=|A^T|$

(2) $|kA|=k^n|A|$

(3) $|A_{n\times n}B_{n\times n}|=|A||B|$

知识点 6 矩阵的逆

1.逆矩阵的定义

设 A 是 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=E$（或 $BA=E$），则称矩阵 A 为可逆矩阵或非奇异矩阵，且矩阵 B 称为矩阵 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$.（定理：矩阵若存在逆矩阵，则其逆矩阵是唯一的.）

2.可逆及不可逆的充分必要条件

（1） n 阶矩阵可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow AB=E$（或 $BA=E$）

$\Leftrightarrow r(A)=n$

$\Leftrightarrow A^*$ 可逆

$\Leftrightarrow A$ 可以表示为初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价

$\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow \forall b$，非齐次方程组 $Ax=b$ 有唯一解

$\Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性无关

$\Leftrightarrow A$ 的特征值都不为零

（2） n 阶矩阵 A 不可逆 $\Leftrightarrow |A|=0$

$\Leftrightarrow r(A)<n$

$\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性相关

$\Leftrightarrow 0$ 是 A 的特征值

3.逆矩阵的性质

(1)若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$

(2)若A可逆，则$kA\,(k\neq 0)$亦可逆，且$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

(3)若A,B可逆，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4)若A可逆，则A^{T}亦可逆，且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

(5) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

4.求逆方法

(1)定义法：若$AB=E$,则$A^{-1}=B$

(2)伴随矩阵法：$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$

(3)初等变换法:$(A|E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E|A^{-1})$

(4)分块矩阵求逆法

①$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$；　②$\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{pmatrix}$；

③$\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$；④$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}$

知识点 7 克拉默法则

如果线性方程组：$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ ----------- (1)

的系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组（1）有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \dots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中$D_j(j=1,2,\dots,n)$是把系数行列式D中第j列用常数项代替后所得到的n阶行列式.

特殊地，如果齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ ------ (2)

的系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组（2）只有零解:

$x_1=x_2=\cdots x_n=0$.

知识点 8 分块矩阵

1. 矩阵的分块

用几条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵，把子矩阵看作原矩阵的一个元素，就得到了分块矩阵.

A以行分块:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix},$$

q其中$A_i=[a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots\ ,a_{in}]$是$A$的一个子矩阵。

$$B\text{ 以列分块：}B=\left[\begin{array}{c:c:c:c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right]=[B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n],$$

其中$B_J=[b_{1j},\ b_{2j},\ \cdots,\ b_{mj}]^T$是$B$的一个子矩阵。

2. 分块矩阵的基本运算（以2×2型分块矩阵为例）.

（1）加法$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$

（2）数乘$k\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kA & kB \\ kD & kC \end{bmatrix}$

（3）乘法$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$

（4）若A,B分别为m,n阶方阵，则$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}$

（5）逆矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

（6）转置$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$

知识点 9 初等矩阵

1. 初等变换

（1）一个非零常数乘以矩阵的某一行（列）；

（2）互换矩阵中两行（列）的位置；

（3）将某行（列）的k倍加到另一行（列）.

以上三种变换称为矩阵的三种**初等行（列）变换**，且分别称为倍乘、互换、倍加初等行（列）变换.

2. 初等矩阵

由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，以 3 阶矩阵为例，它们分别是

（1）$E_2(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$E$ 的第 2 行（或第 2 列）乘以k倍，称为**倍乘初等矩阵**；

（2）$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$E$ 的 1,2 行（或 1,2 列）互换，称为**互换初等矩阵**；

（3）$E_{13}(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$,$E$ 的第一行的k倍加到第 3 行(或第 3 列的k倍加到第一列)，称为**倍加初等矩阵**.

3. 初等矩阵的性质

（1）初等矩阵的转置仍是初等矩阵；

（2）因$|E_i(k)|=k\neq0,|E_{ij}|=-1\neq0,|E_{ij}(k)|=1\neq0$,故初等矩阵都是可逆矩阵，且$[E_i(k)]^{-1}=E_i\left(\frac{1}{k}\right),E_{ij}^{-1}=E_{ij}$,$[E_{ij}(k)]^{-1}=E_{ij}(-k)$，其逆矩阵仍是初等矩阵；

（3）若A是可逆矩阵，则A可以表示成一系列初等矩阵的乘积，即$A=P_1P_2\cdots P_i$，其中$P_1,P_2,\cdots,P_i$都是初等矩阵；

（4）对n阶矩阵A进行初等行变换，相当于将矩阵A左乘相应的初等矩阵；同理对n阶矩阵B进行初等列变换，相当于将矩阵B右乘相应的初等矩阵.

4. 矩阵等价

如果矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B，则称矩阵A与B等价.

A与B等价$\Leftrightarrow$存在可逆阵P及Q，使$PAQ=B\Leftrightarrow A,B$同型，且$r(A)=r(B)$.

5. 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[A|E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E|A^{-1}]\text{或者}\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}E\\A^{-1}\end{bmatrix}.$$

知识点 10 矩阵的秩和矩阵等价

1.矩阵的秩

设A是$m\times n$阶矩阵，从矩阵A中任取r行和r列，交叉点上的元素按照原有次序排列构成的r阶行列式，称为矩阵A的r阶子式，矩阵A共有$C_m^rC_n^r$个r阶子式，若A至少有一个r阶子式不为零，但所有$r+1$阶子式(如果有)皆为零，称r为矩阵A的秩，记为$r(A)=r$.（注：部分教材用大写R表示秩，即$R(A)=r$；此外一定要记住子式是行列式，因此是一个常数，秩也是一个常数）

2.矩阵秩的求法

对矩阵进行初等行变换阶梯化后，非零行数记为矩阵的秩.如:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\1&2&1&1\\2&3&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\0&1&2&-2\\0&1&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}，\text{即}r(A)=2.$$

3.矩阵秩的性质

性质 1 设A为$m\times n$矩阵，则$r(A)=r(A^T)=r(AA^T)$.

性质 2 设A,B是同型矩阵，则$r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$.

性质 3 设A,B分别为$m\times n$及$n\times s$矩阵，

则$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.

性质 4 设A,B分别为$m\times n$及$n\times s$矩阵，那么

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$$

特别地，如果$AB=\mathbf{0}$，那么$r(A)+r(B)\leqslant n$.

性质 5 设A时$m\times n$矩阵，P，Q分别为m及n阶可逆矩阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ).$$

性质 6 设A是n阶矩阵，则$r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n,\\1,r(A)=n-1,\\0,r(A)<n-1.\end{cases}(n\geqslant 2).$

性质 7 (1) $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B)$. (2) $r\begin{pmatrix}A&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$.

4.矩阵等价的定义

设A,B是两个同型矩阵，若A经过有限次初等变换化为B，称矩阵A与矩阵B等价.

5.矩阵等价判别法

定理 1 设A,B为同型矩阵，则A,B是等价矩阵的充分必要条件是$r(A)=r(B)$.

定理 2 设A,B为同型矩阵，则A,B等价的充分必要条件是存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$.

专题三 线性相关性和向量空间

知识点 11 向量的概念与运算

1.向量的概念

由n个数构成的数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为n维列向量或n维行向量.若无特殊说明，一般我们所说的向量都是指列向量，另外所有元素皆为零的向量称为**零向量**，用符号$\mathbf{0}$表示.

向量的模或长度：设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$,称$\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}$为**向量的模或长度**，记为$|\alpha|$。显然，零向量的模为 0；另外，如果向量的模为 1，则我们称该向量为**单位向量**.

2.向量的三则运算

记$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

则$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)^T$,

$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T$

其运算满足以下性质：

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$, $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

3.向量的内积

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$称为向量$\alpha$，$\beta$的**内积**，记为$(\alpha,\beta)$，若$(\alpha,\beta)=0$，称向量$\alpha$，$\beta$**正交**.

向量的内积满足如下性质：

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$；

(2) $(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2$，因此$(\alpha,\alpha)=0$的充要条件是$\alpha=\mathbf{0}$；

(3) $(a,k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_n\beta_n)=k_1(a,\beta_1)+k_2(a,\beta_2)+\cdots+k_n(a,\beta_n)$.

知识点 12 向量组的线性相关和线性表示

1.线性相关的定义

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为一个向量组，则称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的**线性组合**.

若存在一组不全为0的数$x_1,x_2,\cdots,x_s$使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性相关**.

$\Longleftrightarrow$ 齐次方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}(Ax=\mathbf{0})$ 有非零解

$\Longleftrightarrow r(A)<s$.

若使$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\mathbf{0}$成立，必须有$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性无关**.

$\Longleftrightarrow$ 齐次方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}(Ax=\mathbf{0})$ 仅有零解

$\Longleftrightarrow r(A)=s$.

2.判别线性相关性的方法

设有s个m维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 构造矩阵$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]_{m\times s}$

①$s=m$，判断行列式是否为 0，

$$\begin{cases}|A|=0\Longrightarrow \text{线性相关}(\text{此时}r(A)<s)\\ |A|\neq 0\Longrightarrow \text{线性无关}(\text{此时}r(A)=s)\end{cases}$$

②$s>m$,必定线性相关（此时，$r(A)\leqslant m<s$）

③$s<m$时，将矩阵A利用行初等变换化成行阶梯型B,求B的秩

$$\begin{cases}r(B)<s\Rightarrow \text{线性相关}\\ r(B)=s\Rightarrow \text{线性无关}\end{cases}$$

3.线性表示的定义

（1）存在一组数$x_1,x_2,\cdots,x_s$,使得$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$成立，称$\beta$**可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示**.

$$\Longleftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\beta(Ax=\beta)\text{有解}\Longleftrightarrow r(A\mid\beta)=r(A)$$

（2）不存在任何一组数$x_1,x_2,\cdots,x_s$,使得$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$，则称$\beta$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示.

$$\Longleftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\beta(Ax=\beta)\text{无解}\Longleftrightarrow r(A\mid\beta)\neq r(A)$$

4.线性表示的重要结论

①若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，但$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示.

②若$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示，且$s>t$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$必定线性相关

③若$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示，且$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$线性无关，则$t\geqslant s$.

5.线性相关性结论

①部分相关$\Longrightarrow$整体相关，例如：α_1,α_2线性相关$\Longrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

②整体无关$\Longrightarrow$部分无关，例如：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关$\Longrightarrow$ α_1,α_2线性无关.

③原来相关$\Longrightarrow$缩短相关，例如：$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$线性相关，则缩短后$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$也线性相关.

④原来无关$\Longrightarrow$延长无关，例如：$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$线性无关，则无论$a,b$取何值，$\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}3\\4\\b\end{bmatrix}$都不可能线性相关.

知识点 13 极大线性无关组

1.极大线性无关组的定义

若$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足：（1）取自$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，(2) 线性无关

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一个 α_i 均可由其线性表示，则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**.

对任意一个向量组而言，r 是唯一的，称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的**秩**.

2.求极大线性无关组的基本步骤

(1) 构造 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

(2) 对 A 作出初等行变换，化为行阶梯型矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，在每个台阶上任取一列，即可得到极大线性无关组（定理：经过初等行变换，不改变矩阵列向量的线性相关性）。

知识点 14 等价向量组

1.等价向量组的定义

两个向量组：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ （2）$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$.

若（1）中每个 $\alpha_i(i=1,2,\cdots s)$ 均可由（2）线性表示，则称向量组（1）可由向量组（2）线性表示. 若（1）和（2）可相互线性表示，则称向量组（1）和向量组（2）是等价的向量组，记为 $(1)\cong(2)$

向量组（1）可由向量组（2）线性表示是指：$\forall\alpha_i\in(1)$，

$\alpha_i=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\begin{bmatrix}k_{1i}\\k_{2i}\\\vdots\\k_{ti}\end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,s)$，利用矩阵分块，上述 s 个式

子可以表示为：$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{ts} \end{bmatrix}$

因此：向量组（1）可由（2）线性表示等价于存在$t\times s$矩阵$K_{t\times s}$,使得$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]K$.

当α_i，β_j是R^n中的列向量时，$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]K$可视为矩阵方程,若向量组$(1)\cong(2)$,那么必定存在矩阵$K_{t\times s}$和矩阵$M_{s\times t}$,使得下面两式同时成立：

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]K; \qquad [\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]M.$$

2.等价向量组的充要条件

若向量组（1）和（2）中向量的维数相同，则它们等价的充要条件是三秩相等：$r(1)=r(2)=r([1\,\vdots\,2])$.

此外，如果向量组（1）可由（2）线性表示，但是它们不等价的充要条件是：$r(2)=r([1\,\vdots\,2])>r(1)$.

3.等价向量组的性质

（a）**自反性：**一个向量组与其自身等价.

（b）**对称性：**若向量组（1）和向量组（2）等价，则向量组（2）也和向量组（1）等价.

（c）**传递性：**若向量组（1）和向量组（2）等价，向量组（2）和向量组（3）等价，则向量组（1）与向量组（3）等价.

知识点 15 标准正交向量组

1.标准正交向量组的定义

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{为标准正交向量组}\Longleftrightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

(1)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$只满足$(\alpha_i,\alpha_j)=0, i\neq j$,则它为正交的向量组.

(2)不含零向量的正交向量组一定是线性无关组.

2.施密特正交化

施密特正交化方法是从一组线性无关的向量中求出一组正交向量的方法.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为欧氏空间$R^n$中的线性无关组，取$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\vdots$$

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i\quad, k=3,4,\cdots,m.$$

则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为$R^n$中的正交向量组.

知识点 16 向量空间

1.向量空间的定义

设集合V非空，且$V\subseteq R^n$，若$\forall\alpha,\beta\in V$, k为实数，有$\alpha+\beta\in V$, $k\alpha\in V$, 则V为向量空间.

2.空间的基与维数

设V是向量空间，若有向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \subseteq V$，且满足：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关

（2）$\forall \beta \epsilon V$，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，即$\beta=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是向量空间$V$的**基**，且$V$的维数$dimV=n$.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$维向量空间$V$中的标准正交向量组，则它为向量空间$V$的**标准正交基**（或规范正交基）。

3.空间中向量的坐标

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量空间 V 的基，任取向量 $\xi \in V$，若 $\xi=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，则 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 是 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量.

4.过渡矩阵和坐标变换

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$n$维向量空间$V$的两组基，则有$n$阶方阵$C$，使得$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]C$，其中$C$是由基$\{\alpha_i\}$到基$\{\beta_i\}$的过渡矩阵.

设向量空间V中向量ξ在基$\{\alpha_i\}$和$\{\beta_i\}$下坐标分别为X和Y，即$\xi=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X, \xi=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]Y$，

且$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]C$，则有$X=CY$.

专题四 线性方程组的求解

知识点 17 齐次线性方程组

1.齐次线性方程组有解的条件

当$r(A)=n$时(此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关)，方程组（1）只有零解;

当$r(A)=r<n$时(此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关)，方程组（1）有非零解，且线性无关解的个数为$n-r$.

特别地，如果A为n阶方阵，则根据克拉默法则

（1） 齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$只有零解的充要条件是$|A|\neq 0$

（2） 齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$有非零解(或无数个解)的充要条件是$|A|=0$

2.齐次线性方程组解的性质

若$Ax_1=\mathbf{0}$，$Ax_2=\mathbf{0}$，则$A(k_1x_1+k_2x_2)=k_1Ax_1+k_2Ax_2=\mathbf{0}$，其中$k_1,k_2$是任意常数。即齐次线性方程组的解的任意线性组合仍是方程组的解。

3.齐次线性方程组的求解方法

高斯消元法：将系数矩阵A作初等行变换化成行阶梯型矩阵B（或行标准型矩阵），初等行变换不改变方程组的解，故$Ax=0$和$Bx=0$的解相同，我们只需解出方程组$Bx=0$即可.

我们将B的每行第一个非零元素所在的列对应的未知数视为约束变量，其余变量为自由变量，我们令自由变量为任意常数，并用其表示约束变量，即可得到$Ax=\mathbf{0}$的通解.

4.齐次线性方程组的基础解系和通解

（1）**基础解系：** 设$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$是方程组$Ax=\mathbf{0}$的解，若满足$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$线性无关，且方程组$Ax=\mathbf{0}$的任何一个解均可由$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$线性表出，则称$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$为$Ax=\mathbf{0}$的基础解系.

（2）**通解：** 设$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系，则$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r}x_{n-r}$是方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意常数.

（注意：这里的$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$可全部取 0）

5.齐次线性方程组的解空间

记$S=\{x|Ax=\mathbf{0}\}$表示齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解的全体，且集合S具有如下性质：

（1） 若$x_1,x_2\in S$，那么$x_1+x_2\in S$，即两个解的和还是方程组的解；

（2） 若$x\in S,k\in R$，那么$kx\in S$，即一个解的倍数还是方程组的解.

则有n个未知量的齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解向量集合S构成R^n的一个子空间.我们称S是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的**解空间**。

事实上，解空间是向量空间的一种，因此，解空间也有基和维数，其维数为$Ax=\mathbf{0}$线性无关解的个数.

知识点 18 非齐次线性方程组

1.非齐次线性方程组有解的条件

若$r(A)\neq r(A|b)$(b不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出)，则方程组（2）无解;

若$r(A)=r(A|b)=n$（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$线性相关)，则方程组（2）有唯一解;

若$r(A)=r(A|b)=r<n$,则方程组（2）有无穷多解.

2.非齐次线性方程组解的性质

设ξ_1,ξ_2,ξ是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，x_0是对应齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的解，则:

（1）$\xi_1-\xi_2$是$Ax=\mathbf{0}$的解;

（2）$kx_0+\xi$是$Ax=b$的解（k为任意常数）.

3.非齐次线性方程组的求解方法和通解结构

将增广矩阵$[A|b]$初等行变换化成行阶梯型矩阵（或行标准型矩阵)，求出对应齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解，再加上一个$Ax=b$的特解即是非齐次线性方程组$Ax=b$的通解.

知识点 19 方程组解的理论延伸

1.定义

两个方程组$A_{m\times n}x=\mathbf{0}$和$B_{s\times n}x=\mathbf{0}$有完全相同的解，则称为**同解**

方程组.于是$Ax=\mathbf{0}$,$Bx=\mathbf{0}$是同解方程组

$\Longleftrightarrow Ax=\mathbf{0}$的解满足$Bx=\mathbf{0}$,且$Bx=\mathbf{0}$的解满足$Ax=\mathbf{0}$.

$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)$,且$Ax=\mathbf{0}$的解满足$Bx=\mathbf{0}$

(或$Bx=\mathbf{0}$的解满足$Ax=\mathbf{0}$)

$$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

2.定理

(1) A是$m\times n$阶矩阵，B是$n\times s$阶矩阵，若$AB=\mathbf{0}$，则B的列向量组为方程组$Ax=\mathbf{0}$的一组解.

证明：令$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,则$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$

若$AB=\mathbf{0}$，则$A\beta_1=\mathbf{0}$,$A\beta_2=\mathbf{0}$,$\cdots$,$A\beta_s=\mathbf{0}$,即B的列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$为方程组$Ax=\mathbf{0}$的一组解.

(2) 设方程组$Ax=\mathbf{0}$的解为$Bx=\mathbf{0}$的解，则$r(A)\geqslant r(B)$

证明：设$r(A)=r$,且$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$为齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系，设$r(B)=s$,且$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-s}$为齐次线性方程组$Bx=\mathbf{0}$的基础解系.

因为$Ax=\mathbf{0}$的解为$Bx=\mathbf{0}$的解，但$Bx=\mathbf{0}$的解不一定为$Ax=\mathbf{0}$的解，所以$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-s}$线性表示，

于是$n-r\leqslant n-s$,故$r\geqslant s$,即$r(A)\geqslant r(B)$.

专题五 相似矩阵及二次型

知识点 20 特征值与特征向量

1. 特征值与特征向量的定义

设n阶方阵A满足以下条件：存在数λ（λ可为复数）和非零n列向量x，使得$Ax=\lambda x$成立，则称数λ是方阵A的**特征值**，称x为方阵A对应于特征值λ的**特征向量**.

2. 特征值与特征向量的求法

由$Ax=\lambda x$可得$(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$，因为该齐次方程组有非零解$x$，则$r(\lambda E-A)<n$

所以有：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0,$$

我们记$f(\lambda)=|\lambda E-A|$，$f(\lambda)$为A的**特征多项式**，它是关于λ的n次多项式.

（注：$f(\lambda)=|A-\lambda E|$也是A的特征多项式）

特征值λ就是$f(\lambda)$=0 的根，因此，n阶方阵A在复数域上，一共有n个特征值：λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n.

下面再求特征值λ_i对应的特征向量x_i：由$Ax=\lambda_i x$可知

$(\lambda_i E-A)x=\mathbf{0}$，求出该齐次方程组的非零解即为特征向量$x_i$。根据知识点 16 可知：方程组$(\lambda_i E-A)x=\mathbf{0}$有$n-r(\lambda_i E-A)$个线性无关的非零解，因此我们记$k_i=n-r(\lambda_i E-A)$，则$k_i$表示的是特征值$\lambda_i$对应的线性无关的特征向量的个数，并称$k_i$为特征值$\lambda_i$的**几何重数**.

3. 特征值与特征向量的性质

设A是n阶方阵，且特征值为λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，则

（1）$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \Rightarrow$ **A 的行列式等于所有特征值的积**

（2）$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \Rightarrow$ **A 的迹等于所有特征值的和**

（3）任何一个特征值对应的特征向量一定是无穷个.

（4）λ_i的m个特征向量$x_1,x_2,\cdots,x_m$的任意非零线性组合$\sum_{i=1}^{m}k_i x_i \neq \mathbf{0}$仍然是$\lambda_i$的特征向量.

（5）不同特征值对应的特征向量线性无关.

（6）若A有t个相同的特征值λ，则称λ是A的一个t重特征值，并称t是特征值λ的**代数重数**。显然，所有特征值的代数重数的和为n.

（7）特征值λ的几何重数k小于等于其代数重数t，即$k \leqslant t$.

（8）一个n阶方阵至多有n个线性无关的特征向量.

（9）如果A的所有特征值互异，则A恰有n个线性无关的特征向量，反之不正确.

（10）如果每一个特征值的代数重数都等于几何重数，则A有n个线性

无关的特征向量.

4. 特殊矩阵的特征值和特征向量（必背）

（1）若$Ax=\lambda x$，则

A	$aA+bE$	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	$a\lambda+b$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	x	x	x	x	x	$P^{-1}x$	无关系

（2）若$r(A)=1$，则A的一个特征值为$tr(A)$，其余特征值均为 0.

(3)若A的每一行的行和均为a,即等式$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$成立，

则a一定为其特征值，且特征值a对应的特征向量为$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times1}$

（4）若$A=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{bmatrix}$，其中每个$A_i$均为方阵，则$A$的特征值是所有$A_i$特征值的并集.（若是上三角形式或下三角形式也正确）

（5）幂等矩阵$A^2=A$的特征值只能为 0 或 1.

知识点 21 矩阵相似对角化

1.定义

对于n阶矩阵A,B，若存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$，则称A和B**相似**，记为$A\sim B$.

若A相似于一个对角矩阵$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$一定是$A$的特征值，此时我们称$A$可**相似对角化**，或简称为$A$可对角化.

此时，$P^{-1}AP=\Lambda$，且$P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$其中$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是A的特征值λ_i对应的特征向量.

2.性质

（1）A和B等价，即$r(A)=r(B)$

（2）A和B的特征值相同，可推出A，B的行列式和迹都相同

（3）A和B同一特征值对应的线性无关的特征向量个数相同，即$r(\lambda E-A)=r(\lambda E-B)$

3.对角化的条件

矩阵A可对角化的充要条件是有n个线性无关的特征向量.

知识点 22 实对称矩阵的对角化

1.实对称矩阵的特性

设 A 是一个实对称矩阵，即 A 的每一个元素 a_{ij} 都是实数，且 $A=A^T$，则 A 的特征向量具有以下性质:

（1）不同特征值对应的特征向量正交（由于特征向量不为零向量，所以一定线性无关）

（2）同一特征值的代数重数 t 一定等于几何重数 k

因此，实对称矩阵 A 一定可相似对角化.

2.用正交阵将对称阵对角化的步骤

（1）求出对称阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

（2）求出 A 的 n 个线性无关的特征向量 α_1，α_2，$\cdots$，α_n；

（3）将 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 正交化和单位化，得到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$；

（4）令 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$.

知识点 23 二次型

1. 二次型的定义

关于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次多项式:

$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}{x_1}^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n$

$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}{x_2}^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\ \cdots$$

$$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}{x_n}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=X^TAX(\text{或记为}x^TAx)$$

称为一个n元二次型，A称为二次型的矩阵.

2. 化二次型为标准形或规范形

如果我们通过适当的变量将$f(X)$变换为$a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_ny_n^2$($a_i$为实数)的形式,则我们称这种二次型为**标准形**，若进一步的变形为$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2$的形式，则称为**规范形**，其中$p$是正惯性系数，$q$是负惯性系数.（显然：规范形是标准形的一种特殊情况）

在考试中,通过令$X=PY$将普通二次型$f(X)$转换为标准形$f(Y)$（或规范形$f(Z)$）的方法称为**可逆线性变换**。

用正交变化法将二次型化为标准形的步骤：

（1）写出二次型f的矩阵A；

（2）求出A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$；

（3）求出A的n个线性无关的特征向量α_1，α_2，$\cdots$，α_n；

（4）将α_1，α_2，$\cdots$，α_n正交化和单位化，得正交规范向量组

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$；

(5) 构造正交阵$Q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，令$x=Qy$，得二次型的标准形：$f=\lambda_1 {y_1}^2+\lambda_2 {y_2}^2+\cdots+\lambda_n {y_n}^2$.

3.惯性定理

同一个二次型$f(X)$,在经过两种不同可逆线性变换后，得到的标准形$f(Y)$或规范形$f(Z)$中每一项的系数是不同的，但是其系数为正数的项与系数为负数的项的数量是相同的。这一现象被称为**惯性定理**：实二次型$f(X)=X^TAX$经过可逆线性变换为标准形时，其标准形中正负项的项数是唯一确定的，他们的和等于矩阵A的秩，且我们称正项数的个数为**正惯性系数**，负项数的个数为**负惯性系数**，正惯性系数减去负惯性系数的差值称为**符号差**。

4.合同

设A,B为n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使得$P^TAP=B$，则称A与B **合同**，记为$A\simeq B$.

合同的性质：若$A\simeq B$，则$r(A)=r(B)$，即若两个矩阵合同，那么它们一定等价；两个同阶对称矩阵合同$\Longleftrightarrow$正负惯性系数相等。

知识点 24 正定二次型和正定矩阵

1. 正定二次型的定义

设n元实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，若对任何非零列向量

$x \in R^n$,均满足$x^T Ax > 0$,则我们称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型，同时称二次型矩阵A为正定矩阵.（注：若$x^T Ax \geqslant 0$,则称A为半正定矩阵）

2. 正定矩阵的必要条件

$$\text{若}A\text{正定，则}\begin{cases} \alpha_{ii} > 0 & \text{（主对角线上元素为正）} \\ |A| > 0 & \text{（行列式大于0）} \\ A^T = A & \text{（一定为对称矩阵）} \end{cases}$$

3. 正定矩阵的充要条件

$$\begin{aligned} & f\text{正定} \\ \Longleftrightarrow\ & A\text{正定} \\ \Longleftrightarrow\ & A^{-1}\text{正定} \\ \Longleftrightarrow\ & \text{所有特征值}\lambda_i > 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \text{正惯性系数}p = n \\ \Longleftrightarrow\ & n\text{个顺序主子式均大于0} \\ \Longleftrightarrow\ & A\text{合同于单位矩阵}E \\ \Longleftrightarrow\ & \text{存在可逆矩阵}P\text{使得}P^T AP = E \end{aligned}$$

4. 负定矩阵

若对任意非零列向量$x \in R^n$，均满足$x^T Ax < 0$，则对称矩阵A是**负定矩阵**。

充要条件：（1）A的所有特征值均小于0；（2）A的偶数阶顺序主子式大于0，奇数阶顺序主子式小于0（负正相间）